Travail et énergie cinétique

I- Energie cinétique d'un solide en translation :

1- Notion de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique d'un solide est l'énergie qu'il possède du fait de son mouvement.

L'énergie cinétique se note E_C ; c'est un nombre toujours positif qui s'exprime en Joule (J) dans le S.I.

2- Energie cinétique d'un solide en translation :

L'énergie cinétique E_C d'un solide en translation est donnée par la formule :

$$E_C = \frac{1}{2} m.V^2 \quad \begin{cases} E_C : \text{énergie cinétique du solide en joules } (J) \\ m : \text{masse du solide en } kg \\ \mathrm{V} : \text{Vitesse du solide en } m.s^{-1} \end{cases}$$

Remarque :

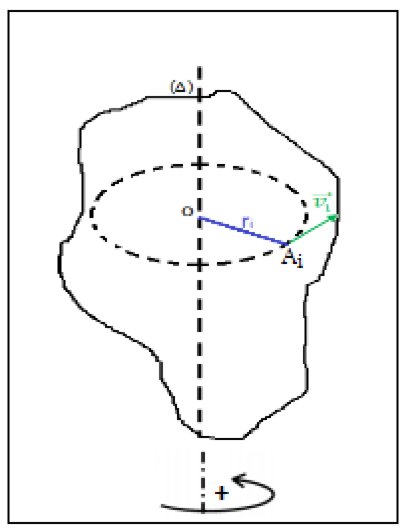
Comme la valeur de la vitesse, l'énergie cinétique dépend du référentiel choisi.

3- Energie cinétique d'un solide en rotation :

Soit un solide indéformable de masse M en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) de vitesse angulaire ω.

Chaque point de solide A_i a une masse m_i est une vitesse linéaire V_i donc il possède une énergie cinétique $E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i.\mathrm{V}_i^2$.

On sait que $\mathrm{V}_i = r_i.\omega$ avec r_i est le rayon de la trajectoire circulaire du point A_i.



Donc : $$E_{Ci} = \frac{1}{2} m_i.r_i^2.\omega^2$$

L'énergie cinétique totale du solide :

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i.r_i^2.\omega^2 = \frac{1}{2}.\omega^2.\sum_{i=1}^{n} m_i.r_i^2$$

On pose : $J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i.r_i^2$ d'où : $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta.\omega^2$

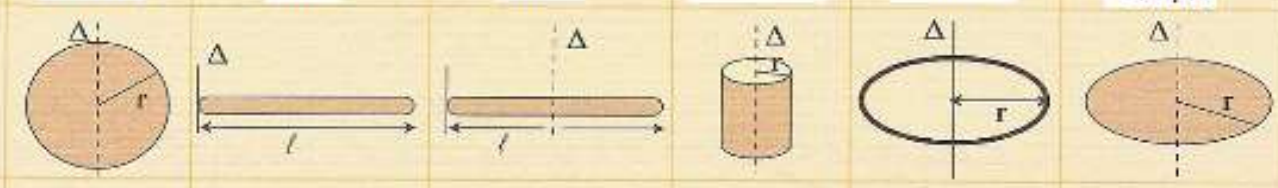
J_Δ : s'appelle le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe de rotation (Δ) . Il dépend de la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

Définition :

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe de moment d'inertie J_Δ et de vitesse angulaire ω est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta . \omega^2 \quad \begin{cases} E_C : \text{énergie cinétique du solide en } (J) \\ J_\Delta : \text{moment d'inertie du solide en } (kg.m^2 \\ \vee : \text{Vitesse angulaire du solide en } rad.s^{-1} \end{cases}$$

– Les expressions des moments d'inertie de quelques solides homogènes :

Corps	Sphère	Tige	Tige	Cylindre	Anneau	Disque
						
Moment d'inertie	$J_\Delta = \frac{2}{5} m.r^2$	$J_\Delta = \frac{1}{3} m\ell^2$	$J_\Delta = \frac{1}{12} m\ell^2$	$J_\Delta = \frac{1}{2} m.r^2$	$J_\Delta = m.r^2$	$J_\Delta = \frac{1}{2} m.r^2$

Application 1 :

On considère un disque homogène de masse m= 800g et de rayon $r = 30cm$ tourne à la fréquence de $\frac{100}{3} tr/min$.

son centre d'inertie par rapport à l'axe de rotation (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{2} m.r^2$.

- Déterminer l'énergie cinétique du disque.

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta . \omega^2 \quad \text{avec : } J_\Delta = \frac{1}{2} m.r^2$$

$$E_C = \frac{1}{4} m.r^2.\omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{4} \times 0{,}8 \times (0{,}3)^2 \times \left(\frac{100 \times 2\pi}{60}\right)^2$$

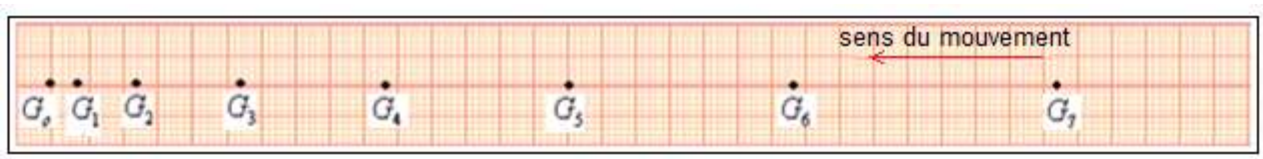
$$E_C \approx 0{,}22\, J$$

II- Théorème de l'énergie cinétique :

1- Activité :

On abandonne, sans vitesse initiale, un autoporteur de masse $m = 700g$ sur une table à coussin d'air inclinée d'un angle $\alpha = 10°$ par rapport à l'horizontale.

On enregistre les positions du centre d'inertie toutes les $60ms$, on obtient l'enregistrement :



$$G_0G_1 = 3mm\,, G_1G_2 = 9mm\,, G_2G_3 = 15mm\,, G_3G_4 = 21mm\,, G_4G_5 = 27mm\,, G_5G_6 = 33mm\,, G_6G_7 = 39mm$$

On prend : $g = 9{,}8\,N/kg$

1- Faire le bilan des forces extérieures agissant sur le mobile.

2- Déterminer l'expression de travail de chaque force, quand le centre d'inertie de l'autoporteur se déplace de la position G_3 à la position G_5. Déduire la somme des travaux des forces appliquées sur l'autoporteur entre ces deux positions $\sum W_{G_3 \to G_5}(\vec{F})$.

3- Calculer l'énergie cinétique de l'autoporteur dans chaque positions $G_3\ et\ G_5$. Et déduire $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ la variation de l'énergie cinétique de l'autoporteur.

4- Déduire la relation entre $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ de l'autoporteur et $\sum W_{G_3 \to G_5}(\vec{F})$.

Exploitation :

1- L'autoporteur est soumis à deux forces :

$\vec{P}$: Poids de l'autoporteur

$\vec{R}$: Réaction de plan incliné

2- L'expression de travail de poids :

$$W_{G_3 \to G_5}(\vec{P}) = m.g.G_3G_5.sin\alpha = 0{,}7 \times 9{,}8 \times 48 \times 10^{-3} \times \sin(10°) = 0{,}057\,J$$

$$W_{G_3 \to G_5}(\vec{R}) = 0 \quad \to \vec{R} \perp \overrightarrow{G_3G_5}$$

$$\sum W_{G_3 \to G_5}(\vec{F}) = W_{G_3 \to G_5}(\vec{P}) + W_{G_3 \to G_5}(\vec{R}) = 0{,}057\,J$$

3- Energie E_{C3} et E_{C5} :

Vitesse instantanée en G_3 : $V_3 = \frac{G_2G_4}{2\tau} = \frac{36\times10^{-3}}{2\times60\times10^{-3}} = 0{,}30\, m/s$

Vitesse instantanée en G_5 : $V_5 = \frac{G_4G_6}{2\tau} = \frac{60\times10^{-3}}{2\times60\times10^{-3}} = 0{,}50\, m/s$

Energie cinétique E_{C3} : $E_{C3} = \frac{1}{2}m.V_3^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}7\times 0{,}3^2 = 0{,}0315\, J$

Energie cinétique E_{C5} : $E_{C5} = \frac{1}{2}m.V_5^2 = \frac{1}{2}\times 0{,}7\times 0{,}5^2 = 0{,}0875\, J$

Variation de l'énergie cinétique ΔE_C:

$$\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3} = 0{,}0875 - 0{,}0315 = 0{,}056\, J$$

4- Conclusion : $\Delta E_C \simeq \sum W_{G_3\to G_5}(\vec{F})$

2- Enoncé du théorème de l'énergie cinétique :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique ΔE_C d'un solide en translation ou en rotation autour d'un axe fixe, entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures appliquées au solide entre ces deux instants t_1 et t_2.

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

Cas de mouvement de translation : $\Delta E_C = \frac{1}{2}m.V_2^2 - \frac{1}{2}m.V_1^2$

Cas de mouvement de rotation : $\Delta E_C = \frac{1}{2}J_\Delta.\omega_2^2 - \frac{1}{2}J_\Delta.\omega_1^2$

3- Activité 2 :

Une bille d'acier de masse $m = 100g$, est maintenue par un électroaimant ; quand on ouvre le circuit d'alimentation, la bille tombe d'un mouvement rectiligne vertical.

Grace à un dispositif convenable on a obtenu les résultats indiqués dans le tableau suivant :

Hauteur h (en m)	Temps t (en s)	Vitesse V (en m/s)	V^2 $(en\ m^2/s^2)$
0,00	0,00	0,00	
0,1	142,85	1,40	
0,2	202,04	1,98	

0,4	285,71	2,80	
0,6	350,00	3,43	
0,8	404,08	3,96	
1,0	451,02	4,42	

1- Compléter le tableau ci-dessus.

2- Tracer la courbe $V^2 = f(h)$ représentant la variation V^2 en fonction de h. Que pouvons-nous en déduire.

3- Trouver le coefficient directeur de la courbe obtenu en précisant son unité.

On donne $g = 9{,}8\ N/kg$ et $1\,N/kg = 1\,m/s^2$

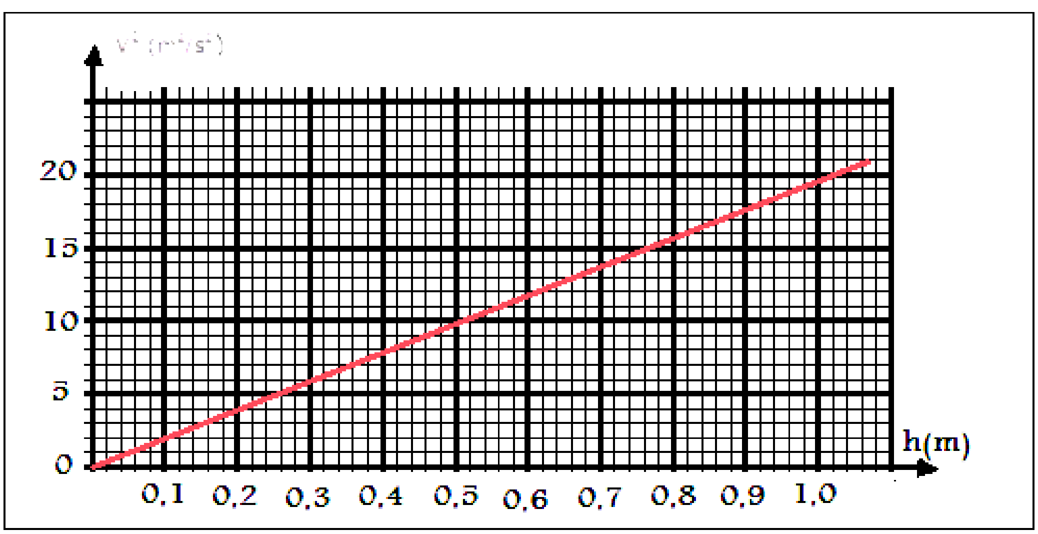
4- comparer la grandeur $\frac{1}{2}m.V^2$ et $(\vec{P})$. Que peut-on en conclure ?

5- vérifier par calcul la relation $\Delta E_C = W(\vec{P})$ à la hauteur $h = 1{,}0m$.

Correction

1- voir tableau ci-dessus :

2- Voir courbe $V^2 = f(h)$:



Hauteur h (en m)	V^2 $(en\ m^2/s^2)$
0,00	0,00
0,1	1,96
0,2	3,92
0,4	7,84
0,6	11,76
0,8	15,68
1,0	19,504

3- La courbe est une droite son équation est : $V^2 = a.h$

a est le coefficient directeur sa valeur est : $a = \frac{\Delta\ V^2}{\Delta h} = \frac{7{,}84-1{,}96}{0{,}4-0{,}1} = 19{,}6\ m/s^2$

4- Comparaison des 2 grandeurs :

On remarque que : $a = 2g$ avec $g = 9{,}8\ N/kg = 9{,}8\,m/s^2$

Donc l'équation de la droite est : $V^2 = 2g.h$

$$\frac{1}{2}m.V^2 = \frac{1}{2}m.2g.h$$

$$\frac{1}{2}m.V^2 = m.g.h$$

$\frac{1}{2}m.V^2$ représente la variation de l'énergie cinétique ΔE_C et $m.g.h$ représente le travail de poids $W(\vec{P})$ donc : $\boldsymbol{\Delta E_C = W(\vec{P})}$

5- Vérification de la relation :

$$W(\vec{P}) = m.g.h = 0{,}1 \times 9{,}8 \times 1{,}0 = 0{,}98\ N$$

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = \frac{1}{2}m.V^2 - 0 = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 19{,}54 = 0{,}98\ J$$

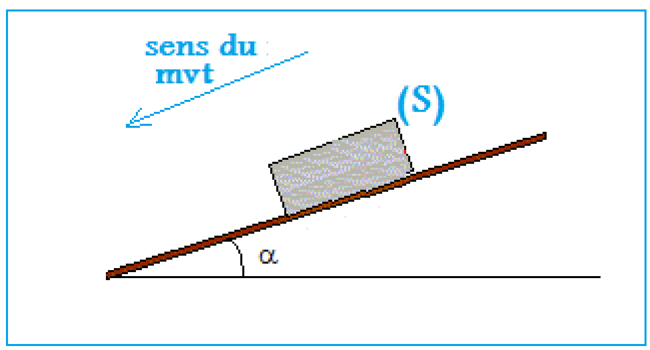
Donc :

$$\boldsymbol{\Delta E_C = W(\vec{P})}$$

Exercices d'applications

Exercice 1 :

Un solide (S), de masse $m = 60kg$, glisse sur un plan incliné d'angle $\alpha = 15°$ par rapport au plan horizontal (voir figure).



Le solide (S) est lâché du point A sans vitesse initiale, après un parcourt de $AB = 100m$ sa vitesse devient $V_B = 45\ km/h$. On donne $g = 10\ N/kg$

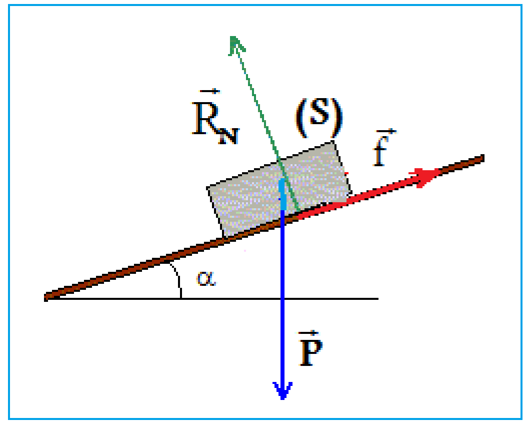
1- Calculer la force de frottement f sachant que son intensité reste constante.

2- le solide (S) poursuit son mouvement sur le plan horizontal BC. Calculer la distance parcourue par le solide sur le plan horizontale avant de s'arrêter.

Corrigé

1- Système étudié : le solide S

Bilan des forces exercées sur le solide (S) : $\vec{P}$; $\vec{R}$



On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le solide (S) :

$$\Delta E_C = E_{C2} - E_{C1} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R})$$

$$W_{A\to B}(\vec{R}) = W_{A\to B}(\overrightarrow{R_N}) + W_{A\to B}(\vec{f}) = \vec{R}_N.\overrightarrow{AB} + \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

$$= 0 - f.AB$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.AB.sin\alpha - f.AB$$

$$f.AB = m.g.AB.sin\alpha - \frac{1}{2}m.V_B^2$$

$$f = \frac{m.g.AB.sin\alpha - \frac{1}{2}m.V_B^2}{AB} = m.g.sin\alpha - \frac{m.V_B^2}{2AB}$$

$$f = 60 \times 10 \times \sin(15°) - \frac{60 \times \left(\frac{45}{3,6}\right)^2}{2 \times 100} = 142N$$

2- Distance parcourue L :

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le solide (S) :

$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{R})$$

$$0 - \frac{1}{2}m.V_B^2 = -f.L$$

$$L = \frac{m.V_B^2}{2.f} \Longrightarrow L = \frac{60 \times \left(\frac{45}{3,6}\right)^2}{2 \times 142} = 33m$$

Exercice 2 :

Un moteur effectue une puissance constante sur un cylindre $P = 10W$.

Le cylindre de masse $m = 2\ kg$ et de rayon $r = 20\ cm$, tourne autour d'un axe fixe (Δ) qui passe par son centre d'inertie.

On donne le moment d'inertie du cylindre : $J_\Delta = \frac{1}{2}m.r^2$

1- Calculer la durée du temps Δt nécessaire pour que la fréquence du cylindre devient $N = 10\ tr/s$, on considère que les frottements sont négligeable.

2- A la fréquence $N = 10\ tr/s$, on applique tangentiellement à la circonférence du cylindre une force $\vec{F}$ constante, pour que le mouvement devient uniforme, calculer la valeur de la force F.

Corrigé

1- La durée Δt nécessaire pour que la fréquence du cylindre devient $N = 10\ tr/s$:

Système étudié : le cylindre

Bilan des forces exercées sur le cylindre :

$\vec{P}$: Poids du cylindre

$\vec{R}$: Action de l'axe de rotation

Action du moment du couple moteur Mc .

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le cylindre :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(C)$$

$$W(\vec{P}) = W(\vec{R}) = 0$$

$$\frac{1}{2}J_\Delta.\omega^2 - 0 = 0 + 0 + \mathcal{P}.\Delta t$$

$$J_\Delta = \frac{1}{2}m.r^2\ ;\ \omega = 2\pi.N$$

$$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}m.r^2.(2\pi N)^2 = \mathcal{P}.\Delta t$$

$$\pi^2.m.r^2.N^2 = \mathcal{P}.\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{\pi^2.m.r^2.N^2}{\mathcal{P}}$$

$$\Delta t = \frac{\pi^2 \times 2 \times 0{,}2^2 \times 10^2}{10} = 7{,}9\ s$$

2- La valeur de la force F :

Bilan des forces exercées sur le cylindre :

$\vec{P}$: Poids du cylindre

$\vec{R}$: Action de l'axe de rotation

Action du moment du moteur C

L'action de la force $\vec{F}$

On applique le théorème de l'énergie cinétique sur le cylindre :

$$\Delta E_C = E_{Cf} - E_{Ci} = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(C) + W(\vec{F})$$

$$0 = W(C) + W(\vec{F})$$

$$M_\Delta(\vec{F}) + M(C) = 0$$

$$on\ a :\ M_\Delta(\vec{F}) = -F.r\ et\ \ M(C)\omega = \mathcal{P}\ \Longrightarrow M(C) = \frac{\mathcal{P}}{\omega}$$

$$-F.r + \frac{\mathcal{P}}{\omega} = 0$$

$$F = \frac{\mathcal{P}}{2\pi.N.r}$$

$$F = \frac{10}{2\pi \times 10 \times 0{,}2} = 0{,}79\ N$$