# Travail et énergie cinétique

## savoir et savoir faire :

- *Connaitre l’expression de l’énergie cinétique d’un solide en translation rectiligne et en rotation*
- *connaitre l’unité de l’énergie cinétique*
- *connaitre l’unité du moment d’inertie*
- *Connaitre et appliquer le théorème de l’énergie cinétique dans le cas de la translation d’un solide et de sa rotation autour d'un axe fixe*

# I. Energie cinétique d'un corps solide en translation :

## I.1- Activité expérimentale :

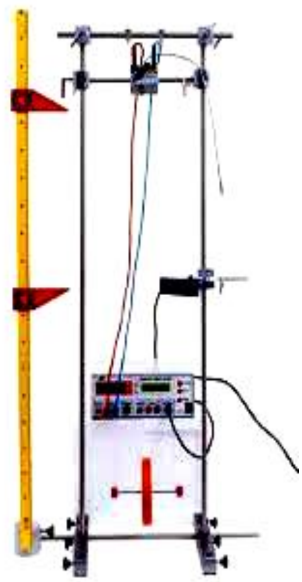
***Un objet est en chute libre lorsqu’il n’est soumis qu’à l’action de son poids donc en théorie cette chute ne peut avoir lieu que dans le vide***

a- **Manipulation :**

Etudie de la chute libre d’une bille en acier (m=90 g).

A l’aide d’un logiciel, nous pouvons facilement enregistrer le mouvement de chute libre de la bille et réaliser une chronophotographie. On peut alors relever les mesures suivantes :

| $A_i$ | t(s) | H(m) | $D_i=A_{i-1}A_{i+1}$(m) | $V_i$(m/s) | $V_i^2$($m^2.s^{-2}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_0$ | 0,000 | 0,000 | - - - | 0 | 0 |
| $A_1$ | 0,040 | 0,0078 | 0,0313 | 0,391 | 0,153 |
| $A_2$ | 0,080 | 0,0313 | 0,0638 | 0,798 | 0,636 |
| $A_3$ | 0,120 | 0,0706 | 0,0943 | 1,179 | 1,389 |
| $A_4$ | 0,160 | 0,1256 | 0,1256 | 1,570 | 2,465 |
| $A_5$ | 0,200 | 0,1962 | 0,1569 | 1,961 | 3,846 |
| $A_6$ | 0,240 | 0,2825 | 0,1883 | 2,354 | 5,541 |
| $A_7$ | 0,280 | 0,3845 | 0,2198 | 2,748 | 7,551 |
| $A_8$ | 0,320 | 0,5023 | 0,2512 | 3,140 | 9,860 |
| $A_9$ | 0,360 | 0,6357 | 0,2825 | 3,531 | 12,468 |
| $A_{10}$ | 0,400 | 0,7848 | - - - | - - - | - - - |



b- **Exploitation :**

1) Tracer sur du papier millimétré v=f(h) puis v²=f(h).
2) Trouver le coefficient directeur de la droite que vous avez tracé.
3 ) Conclusion ?

**réponse :**

1) Construisons la courbe associée à $V^2 = g(H)$
2) la courbe montre que la grandeur $V^2$ est une fonction linéaire de la Hauteur H de la chute $V^2 = KH$

Avec K le coefficient directeur tel que :

**k = 19 ,6 m/s²**

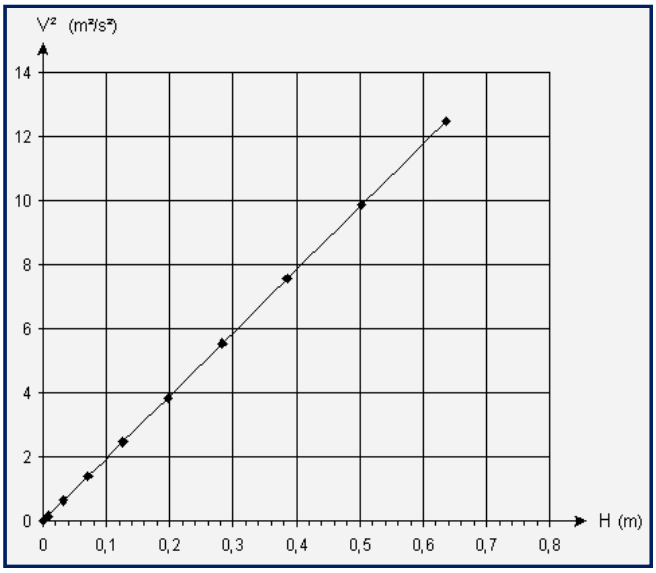
On remarque que K = 2 g avec g = 9,80 N/kg

donc $\boldsymbol{V^2 = 2g\,H}$

3) conclusion :

La courbe $v^2$= f(h) avec h hauteur de chute et V vitesse du solide est une droite passant par l'origine de coefficient directeur k= 2g.

Par conséquent : **$v^2$ = 2.g.h**



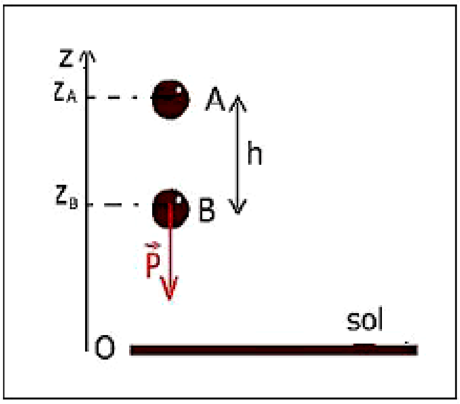

## I .3- Relation entre travail du poids, masse du solide et vitesse :

d'après le chapitre précédant on a :

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$$

Or $h = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = \frac{m.g.V^2}{2.g}$

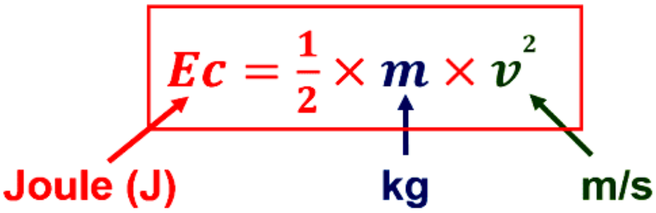
$$\Rightarrow W_{A\to B}(\vec{P}) = \frac{\boldsymbol{m.V^2}}{\boldsymbol{2}}$$




la quantité $\frac{1}{2}\boldsymbol{mV^2}$ notée $\boldsymbol{E_C}$ est appelée énergie cinétique de la bille en translation.

## I .4- Définition de l'énergie cinétique d'un solide en translation

***L'énergie cinétique d'un solide de masse m se déplaçant en translation à la vitesse v est égale à :***




$$\boxed{Ec = \frac{1}{2} \times m \times v^2}$$

**Application 1**

1) Calculer l'énergie cinétique :

a- d'une voiture de masse 1,0tonnes roulant à 90km/h

b- d'un camion de masse 30tonnes roulant à 90km/h

2) Calculer la vitesse d'une voiture de masse 1tonnes ayant la même énergie cinétique que le camion roulant à 90km/h

Quels commentaires, concernant la sécurité routière , inspirent ces résultats ?

# II. Théorème de l'énergie cinétique :

pour le chute libre, le solide est abandonné sans vitesse initiale :

$V_A$=0 m/s c'est-à- dire $E_C(t=0)=0j$ .

Le poids de la bille est la seule force extérieure à laquelle elle est soumise.

donc la variation d'énergie cinétique d'un solide entre les deux positions A et B s'écrit :

$\boldsymbol{Ec(B) - Ec(A) = mg(z_A - z_B) = m.g.h}$ soit : $\boldsymbol{\Delta E_C = W_{A\to B}(\vec{P})}$

On dit que La relation $\boldsymbol{\frac{1}{2}mV^2} = \boldsymbol{W_{A\to B}(\vec{P})}$ montre que le travail du poids $\vec{P}$ de la bille a permis de lui transmettre une énergie $\mathbf{E_C} = \boldsymbol{\frac{1}{2}mV^2}$

**théorème de l'énergie cinétique:**

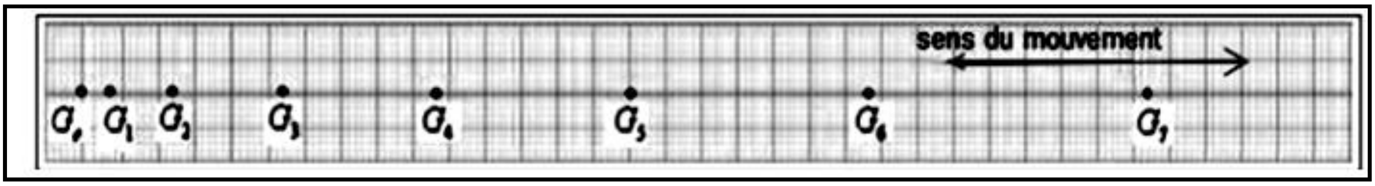
Dans un repère galiléen , la variation de l'énergie cinétique ΔEc d'un corps solide en mouvement de translation rectiligne entre deux instant $t_1$ et $t_2$ est égale la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures exercées sur lui entre ces deux instants .

$$\Delta Ec = \Sigma W(\vec{F}_{ext})$$

**Activité 2 :**

Cas d'un corps solide en translation rectiligne :On pose un autoporteur de masse m = 500 g au-dessus d'une table incliné d'un angle α = 10° par rapport au plan horizontal.

On lance l'autoporteur sans vitesse initiale et on enregistre les positions du centre d'inertie sur des durées égales et successives τ = 60 ms




$G_0G_1 = 3mm$ , $G_1G_2 = 9mm$ , $G_2G_3 = 15mm$ , $G_3G_4 = 21mm$ , $G_4G_5 = 27mm$ , $G_5G_6 = 33mm$ , $G_6G_7 = 39mm$

On prend : $g = 9{,}8\,N/kg$

1- Faire le bilan des forces extérieures agissant sur le mobile.

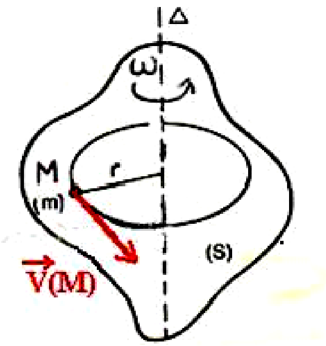
2- Déterminer l'expression de travail de chaque force, quand le centre d'inertie de l'autoporteur se déplace de la position $G_3$ à la position $G_5$. Déduire la somme des travaux des forces appliquées sur l'autoporteur entre ces deux positions $\sum W_{G_3\to G_5}(\vec{F})$.

3- Calculer l'énergie cinétique de l'autoporteur dans chaque positions $G_3$ et $G_5$. Et déduire $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ la variation de l'énergie cinétique de l'autoporteur.

4- Déduire la relation entre $\Delta E_C = E_{C5} - E_{C3}$ de l'autoporteur et $\sum W_{G_3\to G_5}(\vec{F})$.

## III. Énergie cinétique d'un corps solide en rotation autour d'un axe fixe

### III. 1- Expression de l'énergie cinétique dans le cas de mouvement de rotation.




Soit (S) un solide indéformable de masse totale M en mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Δ) de vitesse angulaire ω .
Chaque point de solide Ai a une vitesse linéaire $V_i$ et de masse $\boldsymbol{m_i}$ donc il possède une énergie cinétique $E_{ci} = \frac{1}{2} m V_i^2$
On sait que chaque vitesse linéaire $\mathbf{v_i = r_i . \omega}$ avec $\mathbf{r_i}$ le rayon de la trajectoire circulaire du point $\boldsymbol{A_i}$
Donc l'énergie cinétique du point Ai s'écrit : $\boldsymbol{E_{ci} = \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2}$
D'où l'énergie cinétique totale du solide **:**

$$\boldsymbol{E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{ci} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \, r_i^2 \omega^2}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$

La grandeur $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$ caractérise le solide (S) . Il dépend de sa masse et la répartition de cette masse autour de l'axe de rotation ,
cette grandeur notée $J_\Delta$ est appelée : moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ , son unité dans le système international est kg.m$^2$ . donc : $\boldsymbol{J_\Delta = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$

**Définition :**

**L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe de moment d'inertie $J\Delta$ et de vitesse angulaire $\omega$ est :**

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2} \quad \begin{cases} \boldsymbol{E_c} : \textbf{énergie cinétique du solide en (J)} \\ \boldsymbol{J_\Delta} : \textbf{moment d'inertie du solide en (kg. m}^2\textbf{)} \\ \boldsymbol{\omega} : \textbf{Vitesse angulaire du solide en rad. s}^{-1} \end{cases}$$

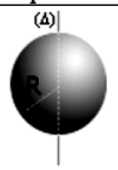
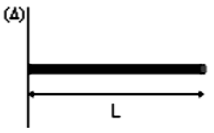
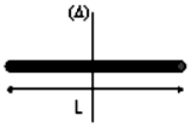
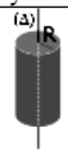
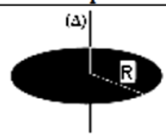
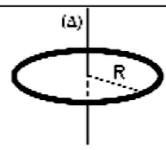
**Application : 2**

Une roue de 18kg et de 40cm de diamètre tourne à la fréquence de rotation de 1500tr/min.

1. Calculer la vitesse linéaire d'un point de sa circonférence.
2. Déterminer son moment d'inertie et son énergie cinétique.

### III. 2- Quelques moments d'inertie des solides homogènes et de formes connues :

**moments d'inertie de quelques solides usuels**

| Sphère | Tige | Tige | Cylindre | Disque | Cerceau |
|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |
| $J_\Delta = \frac{2}{5} MR^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{3} ML^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{12} ML^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2} MR^2$ | $J_\Delta = \frac{1}{2} MR^2$ | $J_\Delta = MR^2$ |

## IV. Théorème de l'énergie cinétique : Énoncé du théorème de l'énergie cinétique généralisé

Dans un repère galiléen, la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c$ d'un corps solide indéformable translation ou en rotation autour d'un axe fixe, entre deux instants $t_1$ et $t_2$ est égale la somme algébrique des travaux de toutes les forces extérieures exercées sur lui entre ces deux instants.

$$\Delta Ec = \Sigma W(\vec{F}ext)$$

- Pour le mouvement de translation , entre deux positions A et B , la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c$ s'écrit :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mV_B^2 - \frac{1}{2}mV_A^2 = \sum_i W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

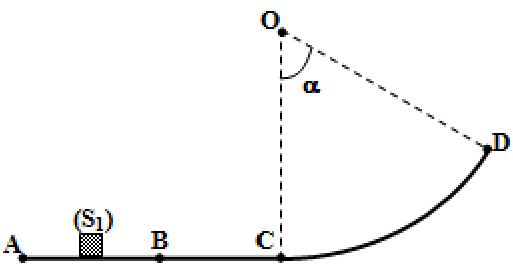
- Pour le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe , entre deux positions A et B , la variation de l'énergie cinétique $\Delta E_c$ s'écrit :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}j_\Delta\omega_B^2 - \frac{1}{2}j_\Delta\omega_A^2 = \sum_i W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$$

**Exercice d'application :**

La piste de lancement d'un projectile constitué d'un solide ponctuel ($S_1$), comprend une partie rectiligne horizontale (ABC) et une portion circulaire (CD) centré en un point O, de rayon r = 1m, d'angle au centre $\alpha$ = 60°et telle que OC est perpendiculaire à AC .
Le projectile ($S_1$) de masse $m_1$= 0,5kg est lancé suivant AB de longueur AB=1m, avec une force horizontale $\vec{F}$ d'intensité 150N, ne s'exerçant qu'entre A et B. ($S_1$) part du point A sans vitesse initiale. On prendra

g = 10 N/ kg.




1-Déterminer la valeur de la vitesse $\vec{v}_D$ du projectile au point D. On néglige les frottements

2- Déterminer l'intensité minimale qu'il faut donner à $\vec{F}$ pour que le projectile atteigne D.

3- En réalité la piste ABCD présente une force de frottement $\vec{f}$ d'intensité 1N.

4- Déterminer la valeur de la vitesse $\vec{v}'_D$ avec laquelle le projectile quitte la piste en D sachant que BC =0,5m.

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

## EXERCICE N°1 :

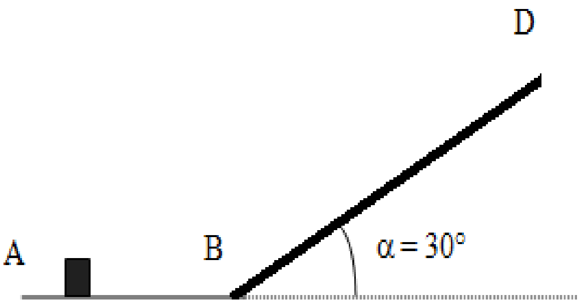
**Un autoporteur de masse m = 600g est lancé depuis un point A avec une vitesse initiale $V_A = 6\ m.s^{-1}$ sur un plan AB horizontal de longueur AB = 3 m sur lequel il glisse sans frottement, puis aborde un plan incliné BD , de longueur BD = 4 m, sur lequel les frottements seront supposés négligeables.**

**L'autoporteur pourra être considéré comme un solide ponctuel.**

**On prendra g = 10 N/Kg**

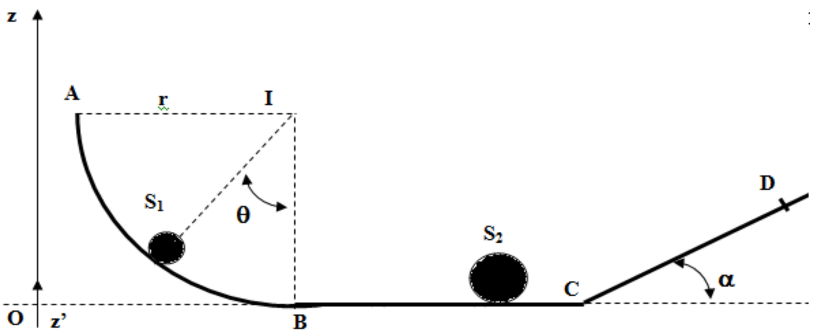
**1- Exprimer, puis calculer l'énergie cinétique de l'autoporteur en A.**

**2- Faire l'inventaire des forces extérieures agissant sur l'autoporteur au cours de la phase AB.**



**Définir ces forces et les représenter sur le dessin**
**3- a) Donner la définition d'un système pseudo-isolé ;**
**b) L'autoporteur est -il pseudo-isolé au cours de la phase AB , la phase BD ?**
**c) En déduire la vitesse du centre d'inertie du mobile en B ?**
**4- Soit $C_1$ un point du plan incliné tel que $BC_1 = 1$ m**
**Calculer le travail du poids de l'autoporteur et le travail de l'action $\vec{R}$ du plan sur l'autoporteur au cours du déplacement $BC_1$.**
**5- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au solide entre les instants $t_B$ et $t_{C1}$ en déduire $V_{C1}$**
**6- Soit $C_2$ le point de rebroussement sur le plan incliné.**
**En appliquant le théorème de l'énergie cinétique au solide entre les instants $t_B$ et $t_{C2}$, en déduire $BC_2$ la distance parcourue par le mobile avant de rebrousser chemin en $C_2$.**

## <u>EXERCICE N°2 :</u>




**On se propose d'étudier le mouvement d'un solide S1 supposé ponctuel , de masse $m_1 = 100$g le long du trajet ABCD représenté sur la figure. Le trajet AB est circulaire de centre I et de rayon r= 0,2 m, le trajet BC est horizontal. Les frottements sont négligeables le long de ABC. Le trajet CD est un plan incliné dont la ligne de plus grande pente fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Le solide $S_1$ est lâché sans vitesse initiale au point A, On prendra g = 10 N/ kg.**

**1- En appliquant le théorème d'énergie cinétique, établir l'expression de la vitesse du solide $S_1$ au point B.**
**2- Montrer que le mouvement du solide $S_1$ est uniforme le long du trajet BC.**
**3- La vitesse $V_1$ acquise par $S_1$ en B est celle avec laquelle il entre en collision parfaitement élastique (choc) avec un solide $S_2$ de masse $m_2$ initialement au repos. La vitesse de $S_2$ juste après le choc est**
**$V_2= 1$ m.s$^{-1}$. Sachant que $V_2/V_1=2m_1/(m_1 +m_2)$, calculer $m_2$.**
**4- Arrivant au point C à la vitesse $V_2$, le solide $S_2$ aborde la partie inclinée du parcours et arrive avec une vitesse nulle au point D. On donne CD = 20 cm.**
**4-1- Montrer que le solide $S_2$ est soumis à une force de frottement f entre les points C et D.**
**4-2- Donner les caractéristiques de f.**

## <u>EXERCICE N°3 :</u>

**Un cylindre homogène (masse M =10 kg, rayon R = 4 cm, axe horizontal) est lancé en exerçant à l'extrémité d'un fil enroulé autour de lui une force d'intensité constante F = 80 N. Le cylindre est initialement au repos.**
**1° Calculer le moment de cette force ?**
**2° Calculer le travail de ce moment lorsqu'il aura fait 5 tours ? 1 tour = $2\pi$ radians**
**3° Calculer son moment d'inertie. $J = \frac{1}{2} M.R^2$**
**4° Quelle vitesse angulaire aura t-il acquis ?**
**5° Quelle sera alors sa fréquence de rotation ?**
**6° Calculer le moment M des forces de freinage qu'il faudrait alors appliquer au cylindre, pour qu'il s'arrête après avoir effectué un tour ?**